نشریه علمی ژئومکانیک نفت
JOURNAL OF PETROLEUM GEOMECHANICS
(JPG)

مقاله پژوهشی

توسعه روش الگوریتم ادغام الاستوپلاستیک معیار موهر-کولمب برای سنگ

منوچهر صانعی[1*]
۱- استادیار، دانشکده مهندسی معدن و متالورژی، دانشگاه یزد

دریافت مقاله: ۱۴۰۲/۰۶/۰۵ پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۰۷/۲۳
شناسه دیجیتال (DOI): 10.22107/JPG.2023.413537.1209

واژگان کلیدی

الگوریتم ادغام، مرحله آزمایش الاستیک، مرحله اصلاح‌کننده پلاستیک، الاستوپلاستیک، معیار موهر-کولمب، سنگ

چکیده

معیارهای الاستوپلاستیک در بسیاری از مباحث مرتبط به ژئومکانیک نفت، ژئوتکنیک و مکانیک سنگ از اهمیت زیادی برخوردارند. با توجه به اهمیت این معیارها اجرا عددی آنها امری ضروری تلقی می‌شود. اگرچه برخی از نرم‌افزارهای موجود معیارهای بیان‌شده را در بردارند اما به خاطر عدم دسترسی به هسته کدنویسی نرم‌افزار، عملا از صحت مدل‌سازی انجام‌شده با آنها اطمینان کامل برقرار نیست. لذا با توجه به اهمیت این معیارها و البته پیچیدگی آنها برای اجرا، در این تحقیق یک مدل عددی جامع برای بهبود الگوریتم ادغام الاستوپلاستیک معیار موهر-کولمب ارائه شد. الگوریتم توسعه داده شده بعنوان نوآوری این تحقیق محسوب می‌شود که به تفصیل شرح داده شد. الگوریتم ادغام پیشنهاد شده شامل دو مرحله آزمایش الاستیک و مرحله اصلاح‌کننده پلاستیک می‌باشد. در مدل پیشنهادی اگر حالت آزمایشی الاستیک در ناحیه الاستیک یا روی سطح تسلیم باشد، جواب الاستیسیته پذیرفته می‌شود. در غیر این صورت، اگر تنش آزمایشی در مرحله اول نتواند شرایط قابل قبول را تایید کند، توسط الگوریتم نگاشت بازگشتی ارائه می‌شود. این روند برای تمام سطوح معیار موهر-کولمب و رأس مدل بصورت جامع و البته بصورت مجزا انجام می‌شود تا اینکه مدل موهر-کولمب بتواند در حین بارگذاری رفتار الاستوپلاستیک ماده را ارائه نماید. مدل ارائه شده برای سنگ مورد بررسی قرار گرفت و اعتبارسنجی مدل پیشنهادی با مقایسه نتایج عددی با داده‌های آزمایشگاهی مورد تأیید قرار گرفت. نتایج نشان می‌دهد که الگوریتم مذکور دارای ثبات عددی است که قاعدتاً این ثبات منجر به همگرایی سریع و پایداری الگوریتم شده است.

۱. پیش‌گفتار

در مهندسی ژئومکانیک نفت، ژئوتکنیک و مکانیک سنگ، مدل‌های ساختاری الاستوپلاستیک با سطوح تسلیم چندگانه، به‌طور گسترده در کاربردهای مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرند که در میان آن‌ها معیار موهر-کولمب از مرسوم‌ترین آنها محسوب می‌شود. همانطور که مشخص است، سطح تسلیم معیار موهر-کولمب یک مخروط شش‌ضلعی نامنظم در فضای تنش اصلی است که از شش وجه با شش لبه و یک رأس تشکیل شده است. هنگامی که قانون متعامد در یک نقطه از لبه سطح تسلیم اعمال می‌شود، نرمال منحصر به فرد نیست و سطح تسلیم فعال نهایی ناشناخته است که پیچیدگی‌های الگوریتمی و عددی بسیاری را ایجاد می‌کند.

با توجه به اهمیت معیار موهر-کولمب و البته پیچیدگی‌های گسترده آن، محققان مختلف راه‌حل‌های مختلفی برای اجرا این معیار ارائه نموده‌اند. بر همین اساس، کویتر با اعمال معیار بارگذاری برای هر سطح تسلیم نقطه منفرد، تکامل کرنش پلاستیک را برای سطوح تسلیم چندگانه پیشنهاد کرد [۱]. مارک یک روش مشابه اتخاذ نمود و تلاش کرد با جایگزینی مواردی سرعت همگرایی معادله تعادل کلی را تسریع ببخشد [۲]. زینکویچ و پد سطح تسلیم معیار موهر-کولمب را اصلاح و معیار تسلیمی جدید در قالب منحنی ارائه نمودند [۳]. اسلون و بوکر یک معیار اصلاح‌شده برای گرد کردن گوشه‌های

* بخش استخراج، دانشکده مهندسی معدن و متالورژی، دانشگاه یزد، گروه نفت، ژئومکانیک نفت. *m.sanei@yazd.ac.ir*

سطح تسلیم پیشنهاد کردند [۴]. سالون گوشه‌های معیار موهر-کولمب را هموار که تابع تقریبی بدست آمده پیوسته بود. لارسون و رونسون [۵] بازگشت تنش را در فضای تنش اصلی انجام دادند تا از تکینگی معیار موهر-کولمب اجتناب کنند. کلاوزن و همکاران [۶] روش هندسه بازگشت تنش را برای معیار موهر-کولمب ارائه نمودند و این ایده بعداً در سایر مدل‌های پلاستیسیته گسترش یافت [۷]. سیمو و همکاران ایده ریاضی برنامه‌ریزی محدب را پذیرفته و با ترکیب با الگوریتم طرح‌ریزی نزدیک‌ترین نقطه، معیار موهر-کولمب را اجرا نمودند [۸].

همان‌طور که مشخص شد، الگوریتم ادغام عددی مدل‌های ساختاری الاستوپلاستیک پیچیدگی‌های خاصی دارند. توسعه الگوریتم برای هر مدل ساختاری منحصر به فرد است. در برخی از منابع این رویکرد عددی مبتنی بر دو مرحله اصلی است [۹]: مرحله آزمایشی الاستیک و طرح بازگشتی بعدی. نرخ همگرایی روش تکراری برای حل معادلات الاستوپلاستیک غیرخطی به‌شدت به انتخاب متغیرها وابسته است [۱۰].

با توجه به اهمیت معیار موهر-کولمب و عدم دسترسی به هسته کدنویسی نرم‌افزارهای موجود، ضرورت اجرای این مدل‌ها اجتناب‌ناپذیر است. از طرفی پیچیدگی‌های اجرای این مدل‌ها مستلزم توسعه مناسب‌ترین الگوریتم ادغام الاستوپلاستیک است که علاوه بر همگرایی، سرعت همگرایی آن نیز بالا باشد. موارد بیان شده، نشان‌دهنده پیچیدگی این مسئله است.

لذا در این تحقیق با توجه به اهمیت موضوع، یک طرح جامع برای الگوریتم ادغام الاستوپلاستیک معیار موهر-کولمب پیشنهاد می‌شود. الگوریتم ادغام پیشنهاد شده شامل دو مرحله آزمایش الاستیک و مرحله اصلاح‌کننده پلاستیک می‌باشد. در مدل پیشنهادی برای معیار موهر-کولمب اگر حالت آزمایشی الاستیک در ناحیه الاستیک یا روی سطح تسلیم باشد، جواب الاستیسیته پذیرفته می‌شود. در غیر اینصورت، اگر تنش آزمایشی در مرحله اول نتواند شرایط قابل قبول را تایید کند، توسط الگوریتم بازگشت تنش مجدد پیش‌بینی می‌شود. این روند برای تمام سطوح معیار موهر-کولمب و رأس مدل بصورت جامع و البته مجزا انجام می‌شود تا اینکه مدل موهر-کولمب بتواند در حین بارگذاری رفتار الاستوپلاستیک ماده را به‌خوبی نشان دهد. الگوریتم بیان‌شده بعنوان نوآوری این تحقیق محسوب می‌شود. رویکرد پیشنهادی برای معیار موهر-کولمب با مقایسه نتایج عددی مدل موهر-کولمب با نتایج آزمایشگاهی تایید و اعتبارسنجی می‌شود.

۲. مدل ساختاری الاستوپلاستیک

هر مدل ساختاری الاستوپلاستیک غیرخطی امکان توصیف با تئوری الاستوپلاستیسیته را دارد. در واقع زمانی که یک ماده تحت تأثیر شرایط بارگذاری خاص دچار تغییر شکل‌های برگشت‌ناپذیر می‌شود. تانسور کرنش کل $\boldsymbol{\epsilon}$ به دو بخش الاستیسیته و پلاستیسیته به شرح زیر تجزیه می‌شود [۱۱، ۱۲ و ۱۳]:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_e + \boldsymbol{\epsilon}_p \qquad (۱)$$

که در آن $\boldsymbol{\epsilon}_e$ بخش الاستیک و $\boldsymbol{\epsilon}_p$ بخش پلاستیسیته است. در حین بارگذاری بخش الاستیک برگشت‌پذیر است و بخش پلاستیسیته نشان‌دهنده تغییر شکل دائمی است و مربوط به تاریخچه تغییر شکل‌های برگشت‌ناپذیر است [۱۴، ۱۵ و ۱۶]. در این مسائل هنگامی که یک افزایش جابجایی $\dot{\boldsymbol{u}}$ تعیین شد، رابطه بین کرنش و جابجایی تحت نظریه کرنش بی‌نهایت کوچک به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۹]:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla\dot{\boldsymbol{u}} + \nabla^T\dot{\boldsymbol{u}}) \qquad (۲)$$

تغییر شکل الاستوپلاستیک می‌تواند در نتیجه تغییرات ریزساختاری مختلف در ماده باشد و می‌توان این تغییرات را با مجموعه‌ای از متغیرهای آسیب داخلی بیان نمود [۱۷]:

$$\boldsymbol{\chi_i}\,; \quad i = 1, 2, \ldots \qquad (۳)$$

جایی که $\boldsymbol{\chi_i}$ ممکن است اسکالر، بردار یا تانسور رتبه بالاتر باشد. با توجه به متغیرهای آسیب داخلی، انرژی آزاد هلمهولتز بصورت رابطه زیر تعریف می‌شود [۱۸]:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\epsilon}_e, \boldsymbol{\chi}_i) \qquad (۴)$$

از نقطه‌نظر ترمودینامیک، انرژی آزاد هلمهولتز را می‌توان به بخش الاستیسیته $\boldsymbol{F^e}(\boldsymbol{\epsilon_e})$ و پلاستیسیته $\boldsymbol{F^p}(\boldsymbol{\chi_i})$ تجزیه نمود. یعنی با اعمال دیفرانسیل از بخش الاستیسیته انرژی آزاد $\boldsymbol{F^e}$ و جایگزینی آن در نابرابری کلاسیس-دوهام، مفهوم تنش را به‌صورت زیر بیان نمود [۱۷]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \bar{\rho}\frac{\partial \mathbf{F}^{\boldsymbol{e}}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{e}}} \qquad (۵)$$

که در آن $\bar{\rho}$ و $\boldsymbol{\sigma}$ به ترتیب چگالی جرم و تانسور تنش هستند. علاوه بر این، نیروی مزدوج ترمودینامیکی $\boldsymbol{A}_i$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boldsymbol{A}_i = \bar{\rho}\frac{\partial \mathbf{F}^{\boldsymbol{p}}}{\partial \boldsymbol{\chi}_{\boldsymbol{i}}} \qquad (۶)$$

۱,۲. تغییر شکل الاستوپلاستیک

تغییر شکل الاستوپلاستیک از نظر ریاضی با استفاده از چهار اصل اساسی به شرح زیر توصیف می‌شود [۹]:

قانون الاستیک: قانون الاستیک را می‌توان با دو نوع رفتار ساختاری ارائه کرد: الاستیسیته خطی و غیرخطی. قابل ذکر است که الاستیسیته خطی به‌صورت زیر توصیف می‌شود [۱۹]:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = 2\mu\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{e}} + \boldsymbol{\lambda}\, tr(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{e}})\mathbf{I} \qquad (۷)$$

که در آن μ و $\boldsymbol{\lambda}$ به ترتیب مدول برشی و ضریب لامه است و $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ افزایش تنش است.

معیار تسلیم: حد الاستیک و بخش پلاستیکی را از طریق تابع تسلیم پلاستیسیته $\Phi = \Phi(\boldsymbol{\sigma}, A)$ توصیف می‌کند، که در آن $A = \bar{\rho}\,\partial \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{p}}/\partial \boldsymbol{\chi}$ نیروی ترمودینامیکی سخت‌شونده است و $\boldsymbol{\chi}$ متغیر آسیب داخلی است. تابع پلاستیسیته دارای مقادیر منفی در قسمت الاستیسیته و مقادیر صفر در قسمت پلاستیسیته دارد [۲۰].

قانون جریان: لزوم وجود یک تابع پتانسیل پلاستیسیته $\Psi = \Psi(\boldsymbol{\sigma}, A)$ را فرض می‌کند، که مشخص می‌کند چگونه تانسور تغییر شکل پلاستیسیته $\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{p}}$ در فرآیند پلاستیسیته $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{p}} = \dot{\gamma}\boldsymbol{N}$ تکامل می یابد، که در $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{\sigma}, A) = \partial\Psi/\partial\boldsymbol{\sigma}$ جهت جریان است و $\dot{\gamma}$ ضریب پلاستیسیته است.

قانون سخت‌شونده: نحوه تکامل متغیر آسیب داخلی $\dot{\boldsymbol{\chi}} = \dot{\gamma}H$ را مشخص می‌کند که در آن $H(\boldsymbol{\sigma}, A) = -\partial\Psi/\partial A$ مدول سخت‌شونده است.

۲.۲. مدل الاستوپلاستیک موهر-کولمب

مدل الاستوپلاستیک موهر-کولمب یکی از معیارهای مرسوم و متداول در اکثر نرم‌افزارهای مرتبط به ژئومکانیک نفت، ژئوتکنیک و مکانیک‌سنگ است که بیشتر مهندسین در بیشتر شبیه‌سازی‌ها از آنها استفاده می‌کنند. این مدل به‌عنوان یک مدل حساس و وابسته به فشار مطرح شده است [۲۱، ۲۲]. مدل موهر-کولمب برای موادی همچون خاک، سنگ و بتن مناسب است که رفتار آنها به‌طورکلی به فشار هیدرواستاتیکی بستگی دارد. مدل موهر-کولمب شامل سه اصل کلیدی است، یعنی: (الف) قانون الاستیک، (ب) تابع تسلیم، و (ج) قانون جریان.

قانون الاستیک موهر-کولمب:

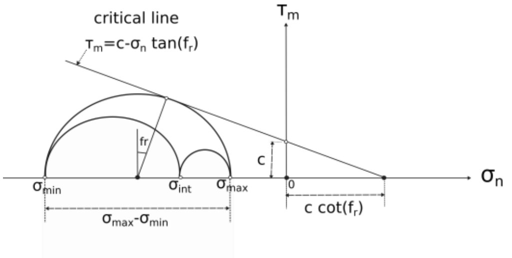
قانون الاستیک مدل موهر-کولمب با استفاده از رابطه تنش-کرنش الاستیک خطی تعریف می‌شود که در معادله (۷) بیان شد.

تابع تسلیم موهر-کولمب:

مدل پلاستیسیته موهر-کولمب یک مدل حساس به فشار هیدرواستاتیکی است که تسلیم به پلاستیسیته زمانی آغاز می‌شود که مقاومت برشی τ_m و تنش نرمال σ_n، به ترکیب بحرانی زیر برسند [۲۱]:

$$\tau_m = c - \sigma_n \tan(\varphi) \qquad (۸)$$

که در آن c چسبندگی و φ زاویه اصطکاک است. تابع تسلیم موهر-کولمب را می‌توان به‌راحتی در صفحه موهر همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است، مشاهده نمود.



شکل ۱. نمایش صفحه موهر در معیار موهر-کولمب [۹]

از شکل ۲ شرایط تسلیم برحسب تنش‌های اصلی به‌صورت زیر تعریف شده است [۹]:

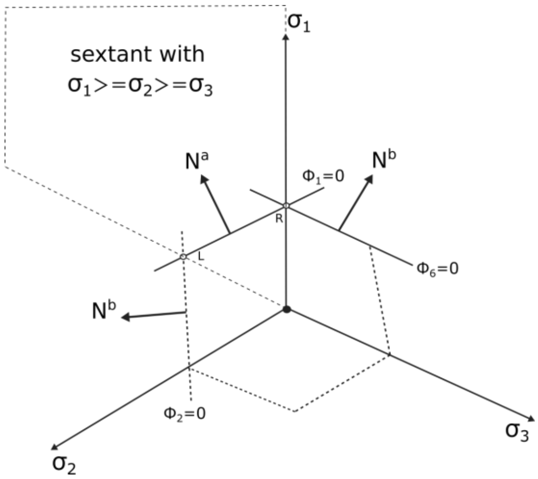
$$(\sigma_{max} - \sigma_{min}) + (\sigma_{max} + \sigma_{min})\sin(\varphi) = 2c\cos(\varphi) \qquad (۹)$$

سپس تابع تسلیم موهر-کولمب برحسب تنش اصلی را می‌توان به‌صورت زیر بیان نمود:

$$\Phi(\sigma, c) = (\sigma_{max} - \sigma_{min}) + (\sigma_{max} + \sigma_{min})\sin(\varphi) - 2c\cos(\varphi) \qquad (۱۰)$$

در نهایت، معیار موهر-کولمب با استفاده از شش تابع تسلیم در فضای تنش اصلی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\Phi_1(\boldsymbol{\sigma},c) = (\sigma_1-\sigma_3)+(\sigma_1+\sigma_3)\ \sin(\varphi) -2c\cos(\varphi)\\
&\Phi_2(\boldsymbol{\sigma},c) = (\sigma_2-\sigma_3)+(\sigma_2+\sigma_3)\ \sin(\varphi) -2c\cos(\varphi)\\
&\Phi_3(\boldsymbol{\sigma},c) = (\sigma_2-\sigma_1)+(\sigma_2+\sigma_1)\ \sin(\varphi) -2c\cos(\varphi)\\
&\Phi_4(\boldsymbol{\sigma},c) = (\sigma_3-\sigma_1)+(\sigma_3+\sigma_1)\ \sin(\varphi) -2c\cos(\varphi)\\
&\Phi_5(\boldsymbol{\sigma},c) = (\sigma_3-\sigma_2)+(\sigma_3+\sigma_2)\ \sin(\varphi) -2c\cos(\varphi)\\
&\Phi_6(\boldsymbol{\sigma},c) = (\sigma_1-\sigma_2)+(\sigma_1+\sigma_2)\ \sin(\varphi) -2c\cos(\varphi)
\end{aligned} \qquad (۱۱)$$



شکل ۲. قانون جریان معیار موهر-کولمب [۹]

قانون جریان موهر-کولمب:

در معیار موهر-کولمب، تابع تسلیم Φ، به‌عنوان پتانسیل جریان، یعنی Ψ تعریف و تکامل کرنش پلاستیسیته $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{p}}$ به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۹]:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{p}} = \dot{\gamma}\boldsymbol{N} = \dot{\gamma}\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma} \qquad (۱۲)$$

۳. الگوریتم ادغام عددی برای مدل الاستوپلاستیک

همان‌طور که بیان شده الگوریتم ادغام عددی به دو مرحله اصلی تقسیم می‌شود: مرحله آزمایشی الاستیک و مرحله اصلاح‌کننده پلاستیک (یا الگوریتم نگاشت بازگشت). اگر مرحله آزمایشی الاستیک در ناحیه الاستیسیته یا روی سطح تسلیم باشد، جواب پذیرفته می‌شود. در غیر این صورت، اگر تنش آزمایشی در مرحله اول نتواند شرایط قابل قبول پلاستیسیته را تأیید کند، توسط الگوریتم بازگشت [۱۶] بر روی سطح تسلیم پیش‌بینی می‌شود.

۱،۳. مدل ساختاری الاستوپلاستیک افزایشی

مدل ساختاری افزایشی با استفاده از روش اویلر ضمنی ارائه‌شده است. این مسئله با دادن کرنش الاستیک $\boldsymbol{\epsilon}_e^{n-1}$، کرنش پلاستیک $\boldsymbol{\epsilon}_p^{n-1}$، و متغیر سخت‌شونده χ^{n-1} در مرحله زمانی (شبه زمانی) t^{n-1} و همچنین تانسور کرنش افزایشی $\Delta\boldsymbol{\epsilon}$ برای بازه زمانی $[t^{n-1}, t^n]$ انجام تا اینکه بتوان سیستم معادلات جبری زیر در مرحله زمانی t^n بدست آورد [۱۶]:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\epsilon}_e^n = \boldsymbol{\epsilon}_e^{n-1} + \Delta\boldsymbol{\epsilon} - \Delta\gamma N(\boldsymbol{\sigma}^n, A^n)\\
&\chi^n = \chi^{n-1} + \Delta\gamma H(\boldsymbol{\sigma}^n, A^n)
\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

برای مجهولات $\boldsymbol{\epsilon}_e^n$، χ^n و ضریب پلاستیسیته افزایشی $\Delta\gamma$، این مسئله به شرایط کوهن تاکر [۲۳] محدود می‌شود، یعنی:

$$\Delta\gamma \geq 0,\ \ \Phi(\boldsymbol{\sigma}^n, A^n) \leq 0,\ \ \ \Delta\gamma\Phi(\boldsymbol{\sigma}^n, A^n) = 0 \qquad (۱۴)$$

جایئکه

$$\boldsymbol{\sigma}^n = \bar{\rho}\frac{\partial \mathbf{F}^e}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_e}|_n \qquad A^n = A^n(\chi^n) = \bar{\rho}\frac{\partial \mathbf{F}^p}{\partial \chi}|_n \qquad (۱۵)$$

و

$$N(\boldsymbol{\sigma}^n, A^n) = \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}|_n \qquad H(\boldsymbol{\sigma}^n, A^n) = -\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial A}|_n \qquad (۱۶)$$

برای حل مسئله الاستوپلاستیک در دو مرحله. این مسئله با یک پیش‌بینی‌کننده کاملاً الاستیک شروع می‌شود، جایی که $\Delta\gamma = 0$ و کرنش الاستیک آزمایشی $\boldsymbol{\epsilon}_{e_{trial}}^n = \boldsymbol{\epsilon}_e^{n-1} + \Delta\boldsymbol{\epsilon}$ و متغیرهای داخلی $\chi_{trial}^n = \chi^{n-1}$. در مرحله بعد، $\boldsymbol{\sigma}_{trial}^n$ و $\Phi(\boldsymbol{\sigma}_{trial}^n, A_{trial}^n)$ براساس $\boldsymbol{\epsilon}_{e_{trial}}^n$ محاسبه می‌شوند. اگر تابع $\Phi(\boldsymbol{\sigma}_{trial}^n, A_{trial}^n) \leq 0$، جواب مسئله تقریبا برای سیستم جبری معتبر است و متغیرها $(\cdot)^n := (\cdot)_{trial}^n$ به‌روز رسانی می‌شوند. در غیر این صورت، الگوریتم نگاشت بازگشتی اعمال می‌شود و سیستم جبری به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود [۱۶]:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\epsilon}_e^n = \boldsymbol{\epsilon}_{e_{trial}}^n - \Delta\gamma N(\boldsymbol{\sigma}^n, A^n)\\
&\chi^n = \chi_{trial}^n + \Delta\gamma H(\boldsymbol{\sigma}^n, A^n)\\
&\Delta\gamma > 0, \qquad \Phi(\boldsymbol{\sigma}^n, A^n) = 0
\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

هنگامی که راه‌حل $\boldsymbol{\epsilon}_e^n$ محاسبه شد، کرنش پلاستیسیته در مرحله زمانی t^n را می‌توان به‌صورت زیر محاسبه نمود [۱۶]:

$$\boldsymbol{\epsilon}_p^n = \boldsymbol{\epsilon}_p^{n-1} + \Delta\boldsymbol{\epsilon} - \Delta\boldsymbol{\epsilon}_e \qquad (۱۸)$$

برای برخی از مدل‌های پلاستیسیته، طرح نگاشت بازگشتی را می‌توان به‌صورت تحلیلی بیان نمود.

۲,۳. الگوریتم ادغام برای معیار موهر-کولمب

برای معیار موهر-کولمب به‌روز رسانی تنش در فضای تنش اصلی انجام می‌شود. ازاین‌رو، پس از محاسبه حالت آزمایشی الاستیک، تجزیه تنش آزمایشی $\boldsymbol{\sigma}_{trial}$ انجام می‌شود. با توجه به تنش‌های اصلی آزمایشی، یعنی $\sigma_{trial}^1 \geq \sigma_{trial}^2 \geq \sigma_{trial}^3$، بررسی مبحث پلاستیسیته به شرح زیر انجام می‌شود [۹]:
اگر تابع تسلیم در فضای تنش اصلی در حالت آزمایشی الاستیک به‌صورت زیر باشد:

$$\Phi_{trial} = \sigma_{trial}^1 - \sigma_{trial}^3 + \left(\sigma_{trial}^1 + \sigma_{trial}^3\right)\sin\varphi - 2c\left(\bar{\epsilon}_n^p\right)\cos\varphi \leq 0 \qquad (۱۹)$$

گام مسئله الاستیک است و همه متغیرها به‌صورت زیر به‌روز رسانی می‌شوند:

$$(\cdot)^{n+1} := (\cdot)_{trial}^{n+1} \qquad (۲۰)$$

در غیر این صورت، روش بازگشتی انجام می‌شود.
لازم به ذکر است که فرمول به‌روز رسانی بازگشتی کلی برای تانسور تنش عبارتست از [۹]:

$$\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \sigma_{trial}^{n+1} - \boldsymbol{D}^e : \Delta\boldsymbol{\epsilon}^p \qquad (۲۱)$$

با توجه به همسانگردی مدل، فرمول به‌روز رسانی شده تنش را می‌توان برحسب تنش‌های اصلی به‌صورت معادله زیر نوشت [۹]:

$$\sigma^j = \sigma_{trial}^j - \sum_{i=1}^{6} \Delta\gamma_i \left(2G\left[N_i^d\right]^j - KN_i^v\right) \qquad (۲۲)$$

برای $j = 1,2,3$. در فرمول بالا، $N_i^v \equiv tr[N_i]$ مولفه حجمی بردار جریان N_i در حالت به‌روز رسانی شده است و $\left[N_i^d\right]^j$ نشان‌دهنده jامین مقدار ویژه تصویر مولفه انحرافی آن است.

۳,۳. چهار نگاشت بازگشتی برای موهر-کولمب

با توجه به چهار توصیف ممکن از قانون جریان موهر-کولمب، الگوریتم نگاشت بازگشتی مبتنی بر نظریه اویلر دارای چهار شکل واضح متمایز است که به محل تنش به‌روز رسانی شده، $\boldsymbol{\sigma}^{n+1}$، در سطح تسلیم بستگی دارد. معادلات هر یک از چهار نگاشت بازگشتی ممکن در زیر بیان شده است [۹]:
۱. حالتی که تنش به‌روز رسانی شده بر روی صفحه اصلی (بخش صاف) قرار دارد. بردار جریان در این مورد بصورت معادله زیر تعریف می‌شود [۹].

$$N^a \equiv N^1 = (1 + \sin\varphi)e_1 \otimes e_1 - (1 - \sin\varphi)e_3 \otimes e_3 \qquad (۲۳)$$

با معرفی معادله (۲۳) در معادله (۲۲) فرمول اصلی به‌روز رسانی شده تنش به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$\sigma^1 = \sigma_{trial}^1 - \Delta\gamma\left[2G\left(1 + \frac{1}{3}\sin\varphi\right) + 2K\sin\varphi\right]$$

$$\sigma^2 = \sigma_{trial}^2 + \Delta\gamma\left(\frac{4}{3}G - 2K\right)\sin\varphi \qquad (۲۴)$$

$$\sigma^3 = \sigma_{trial}^3 - \Delta\gamma\left[2G\left(1 - \frac{1}{3}\sin\varphi\right) - 2K\sin\varphi\right]$$

افزایش کرنش پلاستیکی تجمعی عبارتست از:

$$\Delta\bar{\epsilon}^p = 2\cos\varphi\,\Delta\gamma \qquad (۲۵)$$

ضریب افزایشی پلاستیسیته $\Delta\gamma$، با حل معادله نگاشت بازگشتی زیر به دست می‌آید:

$$\tilde{\Phi}(\Delta\gamma) \equiv \left(\sigma_{trial}^1 - \sigma_{trial}^3\right) + \left(\sigma_{trial}^1 + \sigma_{trial}^3\right)\sin\varphi - 2c\left(\bar{\epsilon}_n^p + \Delta\bar{\epsilon}^p\right)\cos\varphi - a\Delta\gamma = 0 \qquad (۲۶)$$

و

$$a = 4G\left(1 + \frac{1}{3}\sin\varphi\sin\varphi\right) + 4K\sin\varphi\sin\varphi \qquad (۲۷)$$

۲. حالتی که تنش به‌روز رسانی شده در لبه سمت راست هرم قرار دارد. کرنش افزایشی پلاستیسیته، از روش گسسته سازی اویلر پسرو بصورت زیر بدست می‌آید [۹]:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma}^a N^a + \dot{\gamma}^b N^b \qquad (۲۸)$$

کرنشی افزایشی پلاستیسیته در رابطه (۲۸) در این مورد خاص بصورت مجموع دو بردار به شکل زیر ارائه می‌شود:

$$\Delta\epsilon^p = \Delta\gamma^a N^a + \Delta\gamma^b N^b \qquad (۲۹)$$

فرمول‌های متناظر تنش‌های اصلی به‌روز رسانی شده با جایگزینی عبارت فوق در معادله (۲۲) به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}\sigma^1 &= \sigma_{trial}^1 - \left[2G\left(1 + \frac{1}{3}\sin\varphi\right) + 2K\sin\varphi\right]\left(\Delta\gamma^a + \Delta\gamma^b\right) \\ \sigma^2 &= \sigma_{trial}^2 + \left(\frac{4}{3}G - 2K\right)\sin\varphi\,\Delta\gamma^a + \left[2G\left(1 - \frac{1}{3}\sin\varphi\right) - 2K\sin\varphi\right]\Delta\gamma^b\end{aligned} \qquad (۳۰)$$

$$\sigma^3 = \sigma^3_{trial} + \left[2G\left(1 - \frac{1}{3}\sin\varphi\right) - 2K\sin\varphi\right]\Delta\gamma^a + \left(\frac{4}{3}G - 2K\right)\sin\varphi\,\Delta\gamma^b$$

و افزایش کرنش پلاستیسیته تجمعی به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\Delta\bar{\epsilon}^p = 2\cos\varphi\,(\Delta\gamma^a + \Delta\gamma^b) \tag{۳۱}$$

در لبه سمت راست، تنش‌های اصلی به‌روز رسانی شده به‌گونه‌ای است که معادلات صفحه اصلی، $\Phi_1 = 0$، و صفحه سمت راست آن، $\Phi_6 = 0$، به‌طور هم‌زمان برآورده می‌شوند. این شرط مجموعه‌ای از دو معادله نگاشت بازگشتی زیر را می‌دهد که باید برای $\Delta\gamma^a$ و $\Delta\gamma^b$ حل شوند:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}^a\left(\Delta\gamma^a, \Delta\gamma^b\right) &\equiv (\sigma^1_{trial} - \sigma^3_{trial}) + (\sigma^1_{trial} + \sigma^3_{trial})\sin\varphi \\ &\quad - 2\cos\varphi\, c\left(\bar{\epsilon}^p_n + \Delta\bar{\epsilon}^p\right) - \alpha\Delta\gamma^a - b\Delta\gamma^b = 0 \\ \tilde{\Phi}^b\left(\Delta\gamma^a, \Delta\gamma^b\right) &\equiv (\sigma^1_{trial} - \sigma^2_{trial}) + (\sigma^1_{trial} + \sigma^2_{trial})\sin\varphi \\ &\quad - 2\cos\varphi\, c\left(\bar{\epsilon}^p_n + \Delta\bar{\epsilon}^p\right) - b\Delta\gamma^a - a\Delta\gamma^b = 0 \end{aligned} \tag{۳۲}$$

و

$$b = 2G\left(1 + 2\sin\varphi - \frac{1}{3}\sin\varphi\sin\varphi\right) + 4K\sin\varphi\sin\varphi \tag{۳۳}$$

۳. حالتی که تنش به‌روز رسانی شده در لبه سمت چپ قرار دارد. نگاشت برگشتی به لبه چپ کاملاً مشابه حالت بازگشتی به لبه راست است که در مطلب بالای ذکر شد. تفاوت اساسی این است که N^b اکنون بصورت معادله زیر تعریف می‌شود [۹].

$$N^b \equiv N^2 = (1 + \sin\varphi)e_2 \otimes e_2 - (1 - \sin\varphi)e_3 \otimes e_3 \tag{۳۴}$$

فرمول‌های اصلی به‌روز رسانی شده تنش عبارتند از:

$$\begin{aligned} \sigma^1 &= \sigma^1_{trial} - \left[2G\left(1 + \frac{1}{3}\sin\varphi\right) + 2K\sin\varphi\right]\Delta\gamma^a + \left(\frac{4}{3}G - 2K\right)\sin\varphi\,\Delta\gamma^b \\ \sigma^2 &= \sigma^2_{trial} + \left(\frac{4}{3}G - 2K\right)\sin\varphi\,\Delta\gamma^a - \left[2G\left(1 + \frac{1}{3}\sin\varphi\right) + 2K\sin\varphi\right]\Delta\gamma^b \\ \sigma^3 &= \sigma^3_{trial} + \left[2G\left(1 - \frac{1}{3}\sin\varphi\right) - 2K\sin\varphi\right](\Delta\gamma^a + \Delta\gamma^b) \end{aligned} \tag{۳۵}$$

و افزایش متناظر کرنش پلاستیسیته تجمعی نیز با معادله (۳۱) بیان می‌شود. ضریب افزایشی پلاستیسیته با حل معادلات نگاشت برگشتی زیر بدست می‌آید:

$$\tilde{\Phi}^a\left(\Delta\gamma^a, \Delta\gamma^b\right) \equiv (\sigma^1_{trial} - \sigma^3_{trial}) + (\sigma^1_{trial} + \sigma^3_{trial})\sin\varphi - 2\cos\varphi\, c\left(\bar{\epsilon}^p_n + \Delta\bar{\epsilon}^p\right) - \alpha\Delta\gamma^a - b\Delta\gamma^b = 0$$

$$\tilde{\Phi}^b\left(\Delta\gamma^a, \Delta\gamma^b\right) \equiv (\sigma^2_{trial} - \sigma^3_{trial}) + (\sigma^2_{trial} + \sigma^3_{trial})\sin\varphi - 2\cos\varphi\, c\left(\bar{\epsilon}^p_n + \Delta\bar{\epsilon}^p\right) - b\Delta\gamma^a - a\Delta\gamma^b = 0 \tag{۳۶}$$

و

$$b = 2G\left(1 - 2\sin\varphi - \frac{1}{3}\sin\varphi\sin\varphi\right) + 4K\sin\varphi\sin\varphi \tag{۳۷}$$

معادلات فوق نشان‌دهنده تقاطع صفحه اصلی، $\Phi_1 = 0$، با صفحه سمت چپ آن، $\Phi_2 = 0$ است.

۴. حالتی که تنش به‌روز رسانی شده در رأس قرار دارد. رأس هرم موهر-کولمب نقطه‌ای در امتداد محور هیدرواستاتیکی است که برای آن [۹]:

$$p = c\cot\varphi \tag{۳۸}$$

اکنون معادله کلی به‌روز رسانی شده از فشار هیدرواستاتیک برای نگاشت بازگشتی با یک توصیف خطی از رفتار الاستیک به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$p^{n+1} = p^{n+1}_{trial} - K\Delta\epsilon^p_v \tag{۳۹}$$

افزایش کرنش پلاستیسیته تجمعی به شکل زیر است:

$$\Delta\bar{\epsilon}^p = \alpha\Delta\epsilon^p_v; \quad \alpha \equiv \tan\varphi \tag{۴۰}$$

معادله نهایی نگاشت بازگشتی رأس عبارتست از:

$$c(\bar{\epsilon}^p_n + \alpha\Delta\epsilon^p_v)\cot\varphi - p^{n+1}_{trial} + K\Delta\epsilon^p_v = 0 \tag{۴۱}$$

برای کرنش نامعلوم $\Delta\epsilon^p_v$. هنگامی که جواب حاصل شد، موارد زیر به‌روز رسانی می‌شوند:

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}^p_{n+1} &:= \bar{\epsilon}^p_n + \alpha\Delta\epsilon^p_v \\ \sigma^{n+1} &:= p^{n+1}\,\mathbf{I} \end{aligned} \tag{۴۲}$$

۴. نتایج عددی

برای اعتبارسنجی مدل الاستوپلاستیک موهر-کولمب و الگوریتم ادغام عددی ارائه‌شده برای این مدل در این تحقیق، نتایج عددی پیاده‌سازی‌شده از این الگوریتم بایستی با نتایج تحلیلی، آزمایشگاهی و یا نتایج دیگر نرم‌افزارها قیاس و ارزیابی شود. با توجه به محدودیت عدم دسترسی به معادلات تحلیلی غیرخطی و همچنین غیرقابل دسترس بودن نتایج آزمایشگاهی که با دقت بالا بر روی نمونه‌های سنگی انجام‌شده باشد، در این تحقیق اعتبار سنجی الگوریتم توسعه داده‌شده بر اساس نتایج دیگر نرم‌افزارها بدست آمد.

بر همین اساس نرم‌افزار آباکوس که برمبنای روش المان محدود می‌باشد و نرم‌افزاری قوی در زمینه مهندسی ژئومکانیک و ژئوتکنیک است انتخاب شد، تا اعتبار سنجی این الگوریتم جامع با قیاس با نتایج این نرم‌افزار نشان داده شود. لازم به ذکر است که می‌توان برای اعتبارسنجی این الگوریتم از دیگر نرم‌افزارهای که دارای معیار موهر-کولمب هستند، استفاده نمود.

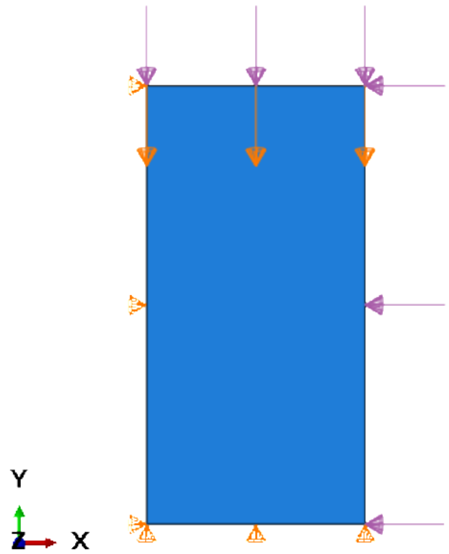
۱,۴. مدل‌سازی عددی آزمایش سه‌محوری

برای اعتبار سنجی الگوریتم ادغام، مدل‌سازی عددی آزمایش تراکم سه‌محوری روی نمونه سنگی در نرم‌افزار آباکوس انجام شد. در این مدل‌سازی، قطر نمونه سنگی ۵۰ میلی‌متر و طول آن ۱۰۰ میلی‌متر می‌باشد. نمونه مشابه آزمایش سه محوری بارگذاری می‌شود تا رفتار تنش-کرنش سنگ حاصل شود.

پارامترهای ورودی برای تجزیه و تحلیل روش المان محدود در جدول ۱ گزارش شده است. مدل‌سازی عددی آزمایش سه‌محوری بصورت دو بعدی انجام شد، که این مدل دارای هندسه مستطیلی مشابه شکل ۳ دارد و در واقع ربع نمونه اصلی است، یعنی عرض مدل دو بعدی ۲۵ میلی‌متر و طول آن ۵۰ میلی‌متر می‌باشد. مدل ساختاری انتخاب‌شده برای رفتار الاستوپلاستیک در نرم‌افزار آباکوس موهر-کولمب می‌باشد. شرایط مدل‌سازی مشابه آزمایش واقعی است. بر همین اساس ابتدا نمونه تحت بارگذاری هیدرواستاتیک قرار گرفت که این بارگذاری با اعمال تنش محصورشده ثابت $54\ MPa$ در سمت راست و بالای نمونه به ترتیب در جهت x (افقی) و y (عمودی) اعمال شد. سپس با حفظ شرایط تنش محوری، مرز بالای نمونه با نرخ $-0.000185\ m/s$ تحت بارگذاری قرار گرفت. در این مدل‌سازی جابجایی نرمال در دیواره چپ و پایین مدل صفر فرض می‌شود. مدت زمان انجام آزمایش ۳۰ ثانیه است.

جدول ۱. پارامترهای ورودی برای تجزیه و تحلیل

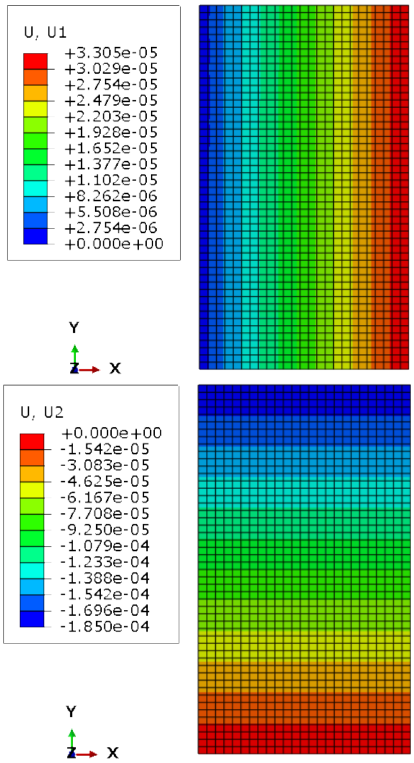
پارامتر	مقدار
چگالی سنگ، $\boldsymbol{\rho}\ [kg/m^3]$	۲۷۰۰
مدول یانگ، $\boldsymbol{E}\ [GPa]$	۲۸
ضریب پواسون، $\boldsymbol{\upsilon}$	۰/۲۵
چسبندگی، $\boldsymbol{c}\ [MPa]$	۸
زاویه اصطکاک، $\boldsymbol{\varphi}\ [°]$	۳۰



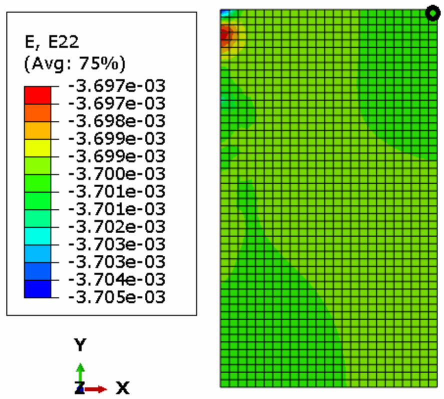
شکل ۳. هندسه مدل و شرایط مرزی مربوطه

مدل‌سازی عددی آزمایش سه محوری در نرم‌افزار آباکوس انجام شد و در ادامه نتایج جابجایی در نمونه در شکل ۴ نشان داده شده است.

برای بررسی اعتبار سنجی الگوریتم ادغام توسعه داده شده در این تحقیق، نتایج کرنش و تنش حاصل از المانی در مدل‌سازی عددی در آباکوس، همان‌طور که در شکل ۵ با دایره سیاه نشان داده شده است، انتخاب شد. سپس پارامترهای جدول ۱ و مقادیر کرنش از جمله کرنش محوری و کرنش حجمی در الگوریتم ادغام توسعه داده شده وارد شد.

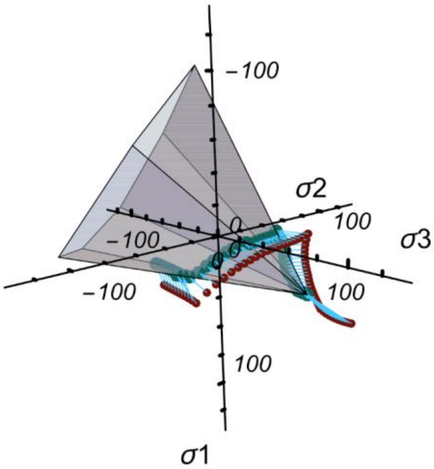


شکل ۴. کنتور جابجایی: (شکل بالا) $U1$، (شکل پایین) $U2$



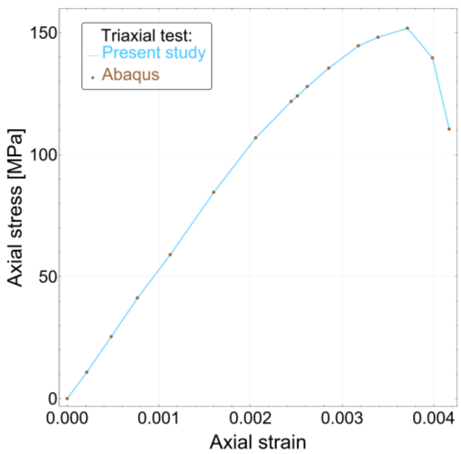
شکل ۵. کرنش $E22$ و المان انتخاب شده با دایره سیاه

نتایج عددی الگوریتم ادغام توسعه داده شده در این تحقیق همان‌طور که راستای بارگذاری آن در شکل ۶ نشان داده شد، با نتایج مدل‌سازی عددی آباکوس مقایسه شد.

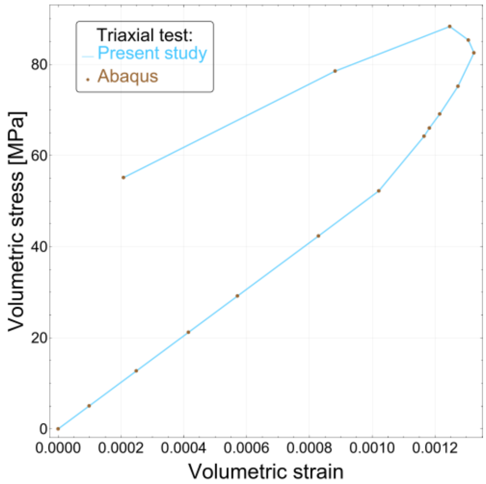


شکل ۶. معیار موهر-کولمب، که در آن نقاط نشان‌دهنده یک مسیر تنش دلخواه هستند. نقاط قرمز تنش‌های آزمایشی و نقاط سبز تنش تصویر شده هستند. فلش‌ها نشان‌دهنده نگاشت بازگشتی هستند

نتایج این قیاس که در شکل ۷ و شکل ۸ نشان داده شده‌اند شامل بررسی دو رفتار متفاوت تنش و کرنش می‌باشند که عبارتند از الف) تنش محوری در مقابل کرنش محوری و ب) تنش حجمی در مقابل کرنش حجمی.



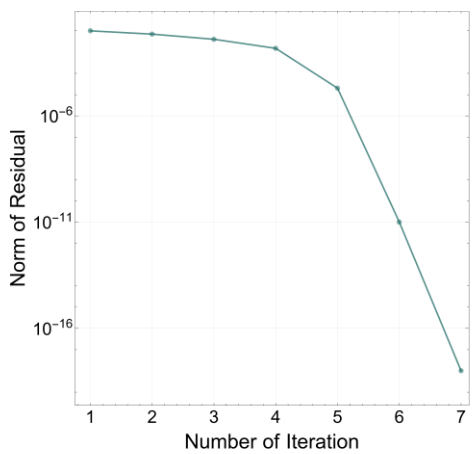
شکل ۷. مقایسه نتایج تنش محوری در مقابل کرنش محوری حاصل از الگوریتم ادغام توسعه داده شده در این تحقیق با نتایج نرم‌افزار آباکوس



شکل ۸. مقایسه نتایج تنش حجمی در مقابل کرنش حجمی حاصل از الگوریتم ادغام توسعه داده شده در این تحقیق با نتایج نرم‌افزار آباکوس

نتایج نشان داده شده در شکل ۷ و ۸، بیانگر این مطلب است که نتایج عددی حاصل از الگوریتم جامع توسعه داده‌شده در این تحقیق انطباق خوبی با نتایج حاصل از نرم‌افزار آباکوس دارد.

برای بیان اهمیت الگوریتم ادغام توسعه داده شده، سرعت همگرایی این الگوریتم در هنگام حل سیستم غیرخطی معادلات در شکل ۹ نشان داده شده است. نتایج در شکل ۹ نشان می‌دهد که تعداد تکرار برای همگرایی مسئله کمتر از ۷ است که این مسئله بیانگر سرعت مطلوب این الگوریتم هنگام همگرایی است.



شکل ۹. تعداد تکرار در مقابل مقدار باقیمانده برای همگرایی مسئله

انطباق خوب نتایج و سرعت همگرایی مطلوب علاوه بر تایید درستی و مطلوب بودن الگوریتم موردنظر، این امکان را برای نویسنده مقاله میسر می‌کند که در مطالعات آینده ژئومکانیکی برای تحلیل‌های الاستوپلاستیک با استفاده از کدهای توسعه داده شده، از این الگوریتم برای بیان رفتار الاستوپلاستیک استفاده کند، تا دقت مدل‌سازی افزایش یابد.

۵. نتیجه‌گیری

توصیف ارائه شده برای معیار موهر-کولمب و الگوریتم ادغام توسعه داده شده در این تحقیق، این امکان را برای خوانندگان علاقه‌مند به پیاده‌سازی مدل موهر-کولمب فراهم می‌کند. الگوریتم ادغام توسعه داده شده تنها شامل دو مرحله آزمایشی الاستیک و مرحله اصلاح‌کننده پلاستیک یا الگوریتم نگاشت بازگشتی است. مزیت این الگوریتم ثبات عددی آن است که قاعدتاً منجر به همگرایی سریع و الگوریتم پایدار خواهد شد. الگوریتم ادغام توسعه داده شده می‌تواند به‌عنوان یک زیرساخت مناسب جهت ارائه مدل‌های الاستوپلاستیک در کدهای توسعه داده شده یا نرم‌افزارهای تحت توسعه به کار رود.

۶. مراجع

[1] Koiter, W.T. Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface. Q. Appl. Math. 1953, 11, 350–354.

[2] Marques, J. Stress computation in elastoplasticity. Eng. Comput. 1984, 1, 42–51.

[3] Zienkiewicz, O.C.; Pande, G.N. Some useful forms for isotropic yield surfaces for soils and rock mechanics. In Finite Elements in Geomechanics; Gudehus, G., Ed.; JohnWiley & Sons: Hoboken, NJ, USA, 1977; pp. 179–190.

[4] Abbo, A.; Lyamin, A.; Sloan, S.; Hambleton, J. A C2 continuous approximation to the Mohr–Coulomb yield surface. Int. J. Solids Struct. 2011, 48, 3001–3010.

[5] Larsson, R.; Runesson, K. Implicit integration and consistent linearization for yield criteria of the Mohr-Coulomb type. Mech. Cohesive -Frict. Mater. 1996, 1, 367–383.

[6] Clausen, J.; Damkilde, L.; Andersen, L. An efficient return algorithm for non-associated plasticity with linear yield criteria in principal stress space. Comput. Struct. 2007, 85, 1795–1807.

[7] Coombs, W.M.; Crouch, R.S.; Augarde, C.E. Reuleaux plasticity: Analytical backward Euler stress integration and consistent tangent. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 2010, 199, 1733–1743.

[8] Simo, J.C.; Kennedy, J.G.; Govindjee, S. Non-smooth multisurface plasticity and viscoplasticity. Loading/unloading conditions and numerical algorithms. Int. J. Numer. Methods Eng. 1988, 26, 2161–2185.

[9] de Souza Neto E, Peri D, Owen D. Computational methods for plasticity. John Wiley Sons Ltd; 2008.

[10] Cecílio DL, Devloo PR, Gomes SM, dos Santos ER, Shauer N. An improved numerical integration algorithm for elastoplastic constitutive equations. Comput Geotech 2015;64:1–9.

[11] Sanei M, Devloo PRB, Forti TLD, Durán O, Santos ESR (2021a) An innovative scheme to make an initial guess for iterative optimization methods to calibrate material parameters of strain-hardening elastoplastic models. Rock Mech Rock Eng 55(1):399–421. https:// doi. org/ 10. 1007/ s00603- 021- 02665-y

[12] Sanei M, Durán O, Devloo PRB, Santos ESR (2021b) Analysis of pore collapse and shear-enhanced compaction in hydrocarbon reservoirs using coupled poro-elastoplasticity and permeability. Arab J Geosci. https:// doi. org/ 10. 1007/ s12517- 021- 06754-8

[13] Sanei M, Durán O, Devloo PRB, Santos ESR (2022) Evaluation of the impact of strain-dependent permeability on reservoir productivity using iterative coupled reservoir geomechanical modeling. Geomech Geophy Geo Energy Geo Res. https:// doi. org/ 10. 1007/ s40948- 022- 00344-y

[14] Sanei M, Duran O, Devloo PRB (2017) Finite element modeling of a nonlinear poromechanic deformation in porous media. In Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering. ABMEC Brazilian Association of Computational Methods in Engineering. https:// doi. org/ 10. 20906/ cps/ cilam ce2017- 0418

[15] Duran O, Sanei M, Devloo PRB, Santos ESR (2020) An enhanced sequential fully implicit scheme for reservoir geomechanics. Comput Geosci 24(4):1557–1587. https:// doi. org/ 10. 1007/ s10596-020- 09965-2

[16] Sanei M, Duran O, Devloo PRB, Santos ESR (2020) An innovative procedure to improve integration algorithm for modified camclay plasticity model. Comput Geotech 124:103604

[17] Hayakawa K, Murakami S, Liu Y. An irreversible thermodynamics theory for elasticplastic- damage materials. Eur J Mech A Solids 1998;17:13–32.

[18] Lemaitre J, Chaboche J-L. Mechanics of solid materials. Cambridge University Press; 1990.

[19] Rudnicki JW. Fluid mass sources and point forces in linear elastic diffusive solids. Mech Mater 1986;5:383–93.

[20] Kossa A. Exact stress integration schemes for elastoplasticity Ph.D. thesis Budapest University of Technology and Economics; 2011.

[21] Coulomb, C.A. Essai sur une application des régles de Maximis et Minimis á quelques problémes de statique relatifs á lárchitecture. 1773, pp. . 343-3 (cit. on p. 58).

[22] Mohr, O. Welche Umst a nde bedingen die Elastizitaatsgrenze und den Bruch eines Materials. Vol. 44. 1900, pp. 1524–1530 (cit. on p. 58).

[23] Borja, Ronaldo I. Plasticity. Springer Berlin Heidelberg, 2013. doi: 10.1007/978-3- 642-38547-6 (cit. on pp. 91, 92).